

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

OKSANA HERINGER DA SILVA

MÉTODOS DE PENALIDADE E O LAGRANGIANO AUMENTADO APLICADO A  
PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

CURITIBA

2017

OKSANA HERINGER DA SILVA

MÉTODOS DE PENALIDADE E O LAGRANGIANO AUMENTADO APLICADO A  
PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Monografia apresentada à disciplina de Projeto de Matemática Industrial como requisito à conclusão do curso de Bacharelado em Matemática Industrial, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Abel Soares Siqueira

Bacharelado em Matemática Industrial  
Setor de Ciências Exatas  
Universidade Federal do Paraná

CURITIBA

2017

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por minha vida, família e amigos.

A minha mãe Ester, que me deu apoio e incentivo nas horas difíceis. As minhas irmãs Rafaella e Maira.

Ao meu orientador Abel Soares Siqueira, pela paciência e suporte para a elaboração deste trabalho.

Meus amigos que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza, em especial a Francine, a Janaina, a Ana Carolina e a Patricia.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

# Resumo

Neste trabalho analisamos e comparamos alguns métodos de otimização restrita não linear. São abordadas a formulação matemática para o problema de otimização com restrições de igualdade, propriedades de convergência e algoritmos. São mostradas também as condições de otimalidade. Analisamos e comparamos o método de penalidade quadrática e o método do lagrangiano aumentado. O método do lagrangiano aumentado é uma combinação do método de Lagrange com o método de penalidade quadrática. Esses métodos foram aplicados a problemas não lineares com restrições de igualdade e o desempenho dos algoritmos implementados é discutido neste trabalho.

**Palavras-chaves:** Programação não linear, Método de penalidade, Método do lagrangiano aumentado.

# Abstract

In this work some nonlinear constrained optimization methods are analyzed and compared. We discuss the mathematical formulation for the optimization problem with equality constraints, convergence properties and algorithms. We also show optimality conditions. We analyze and compare the Quadratic Penalty Method and the Augmented Lagrangian Method. The Augmented Lagrangian Method is a combination of the Lagrange methods and quadratic penalty. These methods were applied to nonlinear problems with equality constraints and the performance of the implemented algorithms is discussed in this work.

**Keywords:** Nonlinear Programming, Penalty Method, Augmented Lagrangian Method.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de mínimo local e global . . . . .	12
Figura 2 – Curvas de nível da função $Q(x, \mu)$ , com $\mu = 1$ . . . . .	21
Figura 3 – Curvas de nível da função $Q(x, \mu)$ , com $\mu = 5$ . . . . .	21
Figura 4 – Curvas de nível da função $Q(x, \mu)$ , com $\mu = 10$ . . . . .	21
Figura 5 – Curvas de nível da função $Q(x, \mu)$ , com $\mu = 100$ . . . . .	21
Figura 6 – Representação da variação de $\mu$ . . . . .	21
Figura 7 – Perfil de desempenho: tempo para 74 problemas . . . . .	29
Figura 8 – Perfil de desempenho: avaliações de funções para 74 problemas . . . . .	30

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Saídas dos algoritmos . . . . .	29
Tabela 2 – Penalidade quadrática . . . . .	34
Tabela 3 – Lagrangiano aumentado com $\lambda$ exato . . . . .	36
Tabela 4 – Lagrangiano aumentado . . . . .	38

# Lista de algoritmos

1	Método da penalidade quadrática . . . . .	20
2	Lagrangiano aumentado . . . . .	25
3	Cálculo de parâmetros . . . . .	28



# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>OTIMIZAÇÃO RESTRITA</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1	O problema de otimização restrita . . . . .	11
1.2	Resultados importantes . . . . .	11
1.3	Condições de otimalidade de primeira ordem para o problema com restrições . . . . .	14
1.4	Condições de otimalidade de segunda ordem . . . . .	15
<b>2</b>	<b>MÉTODOS DE PENALIDADE EXATA</b> . . . . .	<b>16</b>
2.1	Motivação . . . . .	16
2.2	Método de Penalidade . . . . .	16
2.2.1	Penalidade externa pura . . . . .	17
2.3	Método de Penalidade Quadrática . . . . .	19
2.3.1	Convergência do método de penalidade quadrática . . . . .	22
<b>3</b>	<b>MÉTODO DO LAGRANGIANO AUMENTADO</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1	Motivação . . . . .	24
3.1.1	Algoritmo . . . . .	25
3.2	Propriedades do Lagrangiano Aumentado . . . . .	25
<b>4</b>	<b>TESTES COMPUTACIONAIS</b> . . . . .	<b>28</b>
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>A</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>33</b>

# INTRODUÇÃO

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre os métodos de penalidade para resolução de problemas restritos. Em especial o de penalidade quadrática e o lagrangiano aumentado. Os algoritmos foram implementados em linguagem Julia, e foram testados com problemas restritos da biblioteca CUTEst, e comparados.

No primeiro capítulo veremos algumas definições de minimizadores locais e globais, a formulação geral do problema, e também as condições de otimalidade.

No segundo capítulo, apresentaremos o método de penalidade, para resolução dos problemas de otimização restrita. Também veremos as condições necessárias para a convergência global e local do método. Apresentamos também o algoritmo computacional.

No terceiro capítulo, apresentaremos o método de lagrangiano aumentado, e algumas de suas propriedades que consideramos importante.

No quarto capítulo, veremos uma melhor descrição dos algoritmos implementados e os resultados dos testes realizados com os problemas da biblioteca CUTEst. Vamos também comparar os algoritmos através de um perfil de desempenho, para avaliarmos a eficiência e robustez dos algoritmos.

# 1 Otimização Restrita

Neste capítulo veremos alguns conceitos básicos de otimização. Mostraremos alguns resultados para minimização irrestrita, como condições para a existência de um minimizador e as condições de otimalidade. Geralmente um problema de otimização tem a presença de uma ou mais restrições. Algumas referências usadas para este capítulo são [1], [2].

## 1.1 O problema de otimização restrita

Na matemática, otimizar algo significa minimizar ou maximizar uma função, com ou sem restrição nas suas variáveis. Denotaremos o problema de otimização da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) & (1.1) \\ \text{sujeito a} \quad & c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, \\ & c_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I}, \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

onde a função  $f$  e as funções  $c_i$  são reais e suaves no conjunto  $\mathbb{R}^n$ , e os índices  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{I}$  são finitos e disjuntos.

Podemos reescrever o problema (1.1) de forma compacta

$$\min_{x \in \Omega} f(x), \quad (1.2)$$

denotamos por  $\Omega$  o conjunto de busca do problema onde tentamos minimizar  $f$ . Neste caso, temos  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E} \text{ e } c_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I}\}$ , o qual chamaremos de conjunto viável. Uma solução viável que minimiza (ou maximiza) a função objetivo é chamada de uma solução ótima. Por convenção, a forma padrão de um problema de otimização é definida em termos de minimização. Geralmente, a menos que tanto a função objetivo quanto a região viável sejam convexas em um problema de minimização, pode haver alguns mínimos locais.

## 1.2 Resultados importantes

Algumas definições para as soluções locais e globais do problema:

**Definição 1.** Um ponto  $x^* \in \Omega$  é minimizador global de  $f$  em  $\Omega$  se  $f(x^*) \leq f(x)$  para todo  $x \in \Omega$ .

Pode ser difícil de se encontrar o minimizador global, pois geralmente só conhecemos o minimizador local de  $f(x)$ . Grande parte dos algoritmos são capazes de encontrar mínimos locais, isto é, pontos em que  $f$  assume menores valores em relação a uma vizinhança. Formalizando, temos:

**Definição 2.** Um ponto  $x^*$  é uma solução local do problema (1.2) se  $x^* \in \Omega$  e existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $x^*$  tal que  $f(x^*) \leq f(x)$  para  $x \in \mathcal{N} \cap \Omega$

Definimos o mínimo local estrito como:

**Definição 3.** Um ponto  $x^*$  é uma solução local estrita se  $x^* \in \Omega$  e existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $x^*$  tal que  $f(x^*) < f(x)$  para todo  $x \in \mathcal{N} \cap \Omega$  com  $x \neq x^*$

**Definição 4.** Um ponto  $x^*$  é uma solução local isolada se  $x^* \in \Omega$  e existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $x^*$ , tal que,  $x^*$  é a única solução local em  $\mathcal{N} \cap \Omega$ .

Nas definições acima, a vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $x^*$  é um conjunto que contém  $x^*$ .

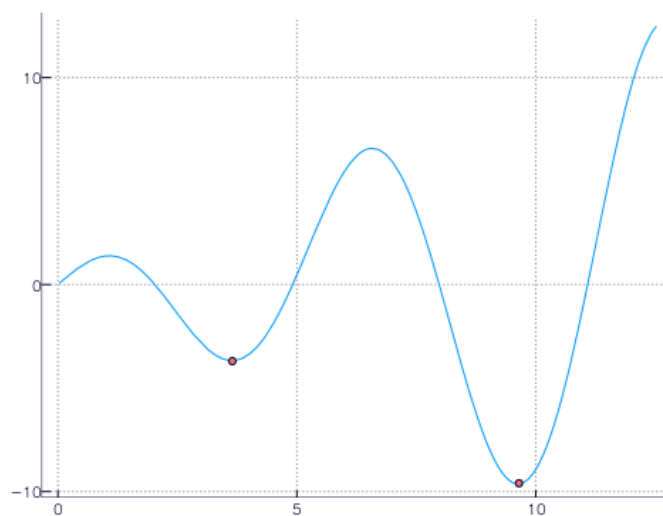


Figura 1 – Representação de mínimo local e global

Na Figura 1, podemos observar um exemplo de mínimo local e mínimo global de uma função real  $f$  definida em  $\Omega = [0, 10]$ .

As condições de otimalidade para um problema irrestrito são relacionadas com as derivadas da função objetivo. Estas condições são de dois tipos:

- Condições Necessárias: são as condições que devem ser satisfeitas por qualquer solução.
- Condições Suficientes: são aquelas que, se satisfeitas para um certo ponto  $x^*$ , garante que  $x^*$  é uma solução.

As condições necessárias para a otimalidade são encontradas assumindo que  $x^*$  é um minimizador local para um problema irrestrito e que existem o gradiente da função e sua matriz Hessiana. As condições suficientes, se satisfeitas por um ponto  $x^*$ , garantem que este ponto é um minimizador local de  $f$ .

Antes de apresentar as condições de otimalidade para o problema restrito, vamos apresentar as do problema irrestrito, uma vez que alguns métodos, como o que estudaremos, transformam o problema restrito em problemas irrestritos.

**Teorema 1** (Teo 2.2 [2]). *[Condição necessária de 1ª ordem] Se  $x^*$  é um minimizador local e  $f$  é continuamente diferenciável em uma vizinhança aberta de  $x^*$ , então  $\nabla f(x^*) = 0$ .*

Um ponto  $x^*$  é chamado estacionário de  $f$  se  $\nabla f(x^*) = 0$ . Portanto, pelo Teorema 1, todo mínimo local é um ponto estacionário.

Definimos as condições necessárias e suficientes, para uma matriz definida positiva quando seus autovalores são positivos e possui determinante positivo. E uma matriz semidefinida positiva com determinante positivo ou igual a zero.

**Teorema 2** (Teo 2.3 [2]). *[Condição necessária de 2ª ordem] Se  $x^*$  é um mínimo local de  $f$  e  $\nabla^2 f(x^*)$  existe e é contínua em uma vizinhança aberta de  $x^*$ , então  $\nabla f(x^*) = 0$  e  $\nabla^2 f(x^*)$  é semidefinida positiva.*

**Teorema 3** (Teo 2.4 [2]). *[Condição suficiente de 2ª ordem] Suponha que  $\nabla^2 f(x^*)$  é contínua em uma vizinhança aberta de  $x^*$  e que  $\nabla f(x^*) = 0$  e  $\nabla^2 f(x^*)$  é positiva definida. Então  $x^*$  é um mínimo local estrito de  $f$ .*

**Definição 5** (Restrições Ativas). Um conjunto ativo  $A(x)$  para qualquer ponto  $x$  viável consiste na união dos índices das restrições de igualdade  $i \in \mathcal{E}$  e dos índices das restrições de desigualdade  $i \in \mathcal{I}$  tal que  $c_i(x) = 0$ , isto é

$$A(x) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x) = 0\}. \quad (1.3)$$

A restrição de desigualdade  $i \in \mathcal{I}$  é dita ativa se  $c_i(x) = 0$  e inativa quando  $c_i(x) < 0$ .

### 1.3 Condições de otimalidade de primeira ordem para o problema com restrições

As condições necessárias definidas no teorema seguinte são chamadas de condições de primeira ordem, pois elas são construídas com as propriedades dos gradientes da função objetivo e das funções de restrição.

Seja a função lagrangiana associada ao problema (1.1)

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x). \quad (1.4)$$

**Teorema 4.** *Suponha que  $x^*$  é uma solução de (1.1), que as funções  $f$  e  $c_i$  em (1.1) são continuamente diferenciáveis, e que o conjunto dos gradientes das restrições ativas  $\{\nabla c_i(x), i \in A(x)\}$  em  $x^*$  seja linearmente independente. Então, existe  $\lambda^*$ , chamado de multiplicador de Lagrange, com componentes  $\lambda_i^*$ ,  $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ , tal que as seguintes condições são satisfeitas em  $(x^*, \lambda^*)$*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (1.5a)$$

$$c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E}, \quad (1.5b)$$

$$c_i(x^*) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (1.5c)$$

$$\lambda^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (1.5d)$$

$$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (1.5e)$$

As condições (1.5a) a (1.5e) são conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker ou condições de KKT. As condições (1.5e) são condições de complementariedade, elas implicam que, ou a restrição  $i$  é ativa, ou  $\lambda_i^* = 0$ , ou possivelmente ambas. Em particular, os multiplicadores de Lagrange correspondentes à inatividade das restrições de desigualdade são zero, então nós podemos omitir os termos para índices  $i \notin A(x^*)$  de (1.3) e reescrever essa condição como

$$0 = \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i \in A(x^*)} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*). \quad (1.6)$$

**Definição 6** (Condição de complementaridade Estrita). Dada uma solução local  $x^*$  do problema (1.1) e um vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  satisfazendo (1.5), dizemos que a condição de complementaridade estrita é satisfeita se, para cada  $i \in \mathcal{I}$ ,  $\lambda_i^* = 0$  ou  $c_i(x^*) = 0$ , mas não ambos. Em outras palavras, temos que  $\lambda_i^* > 0$  para cada  $i \in \mathcal{I} \cap A(x^*)$ .

Essa condição geralmente ajuda a fazer algoritmos convergirem mais rápido para o ponto ótimo  $x^*$ .

## 1.4 Condições de otimalidade de segunda ordem

Nesta seção veremos as condições de otimalidade de segunda ordem. Onde serão consideradas as derivadas segundas das funções  $f$  e  $c_i$ . As condições de segunda ordem nos mostra a curvatura da função lagrangiana nas direções  $w \in \mathcal{F}(x^*)$  para as quais  $w^T \nabla f(x^*) = 0$ . Dado um vetor  $\lambda^*$  de multiplicadores de Lagrange que satisfaz as condições de KKT, podemos definir o cone  $C(x^*, \lambda^*)$  como:

$$C(x^*, \lambda^*) = \{w \in \mathcal{F}(x^*) \mid \nabla c_i(x^*)^T w = 0, \forall i \in A(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ com } \lambda_i^* > 0\},$$

onde  $\mathcal{F}(x)$  é definido como

$$\mathcal{F}(x) = \left\{ d \mid \begin{array}{ll} d^T \nabla c_i(x) = 0, & \text{para todo } i \in \mathcal{E}, \\ d^T \nabla c_i(x) \geq 0, & \text{para todo } i \in A(x) \cap \mathcal{I}. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

O Teorema 5, define uma condição necessária usando a segunda derivada da função Lagrangiana.

**Teorema 5** (Condições Necessárias de Segunda Ordem). *Supondo que  $x^*$  é uma solução local de (1.1), que o conjunto  $\{\nabla c_i(x), i \in A(x)\}$  é linearmente independente e seja  $\lambda^*$  satisfazendo as condições de KKT (1.5). Então,*

$$w^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w \geq 0, \text{ para todo } w \in C(x^*, \lambda^*) \quad (1.8)$$

As condições suficientes, vistas a seguir, são condições sobre  $f$ ,  $c_i$  e  $x^*$ , que garantem que  $x^*$  é uma solução local do problema (1.1).

**Teorema 6** (Condições suficientes de Segunda Ordem). *Supondo que para algum ponto viável  $x^* \in R^n$  existe um vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  tal que, as condições KKT (1.5) são satisfeitas. Suponha que*

$$w^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w > 0, \text{ para todo } w \in C(x^*, \lambda^*), w \neq 0. \quad (1.9)$$

Então,  $x^*$  é a solução local estrita para (1.1).

## 2 Métodos de Penalidade Exata

Métodos de penalidade são aplicados a problemas de programação não linear com restrições. A base dos métodos de penalidade é transformar o problema restrito original em uma sequência de problemas sem restrições, derivados do inicial, acrescentando um termo de penalidade à função objetivo, possibilitando sua resolução pelos métodos conhecidos para este tipo de problema. Este termo penaliza, ou seja, aumenta, o valor da função objetivo quando as restrições não forem satisfeitas.

As técnicas ou estratégias utilizadas em cada método dependem da quantidade de informação disponível e passível de ser utilizada, da maior ou menor eficiência e robustez do algoritmo a utilizar, da facilidade de implementação, e das especificidades do próprio problema. Este capítulo tem como objetivo estudar métodos de penalidade exata, de uma maneira mais geral, e em especial o método de penalidade quadrática a qual adiciona-se à função objetivo o quadrado das restrições violadas. Foram usadas como referências para este capítulo [3], [4].

### 2.1 Motivação

Consideramos uma substituição do problema de otimização com restrições, pelo problema de minimizar uma função que é formada pela função objetivo original do problema, e um termo adicional positivo quando a solução atual viola a restrição, ou é nula, caso contrário.

Definimos a função  $Q(x; \mu)$ , com  $x \in \Omega$  e  $\mu > 0$  como

$$Q(x; \mu) = f(x) + \mu P(x), \quad (2.1)$$

onde  $\mu > 0$  é o parâmetro de penalidade e  $P(x)$  é a função de penalidade escolhida. A função  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deve ser contínua e satisfazer

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ > 0, & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.2 Método de Penalidade

Nesta seção consideramos a versão mais básica do chamado método de penalidade externa. Apesar desta estratégia raramente poder ser usada na prática, suas características



teóricas são base para algoritmos mais sofisticados, inclusive o método de lagrangiano aumentado, nosso objeto de estudo. Veremos também que as propriedades do método de penalidade externa fornecem provas simples de resultados bastante fortes de otimalidade.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto fechado. Definimos o problema não linear como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

### 2.2.1 Penalidade externa pura

Dado uma função  $P$ , e uma sequência  $\mu_k \rightarrow \infty$ , definimos  $x^k$  como a solução global do problema de  $\min Q(x, \mu_k)$ . Observamos que não há um critério de parada. Na teoria, isso significa que a sequência  $\{x^k\}$  tem infinitos termos, onde muitos deles podem ser iguais.

Nos teoremas a seguir supõe-se que a sequência  $\{x^k\}$  está bem definida.

**Teorema 7** (Teo 2.1 e 2.2 [4]). *Suponhamos que a sequência  $\{x^k\}$  admite um ponto limite  $x^*$ . Então,  $x^*$  é uma solução global do problema*

$$\min P(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \Omega, \\ > 0, & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

*Supondo também que a região viável do problema (2.3) é não vazia. Então,  $x^*$  é viável.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{K} \in \mathbb{N}$  tal que

$$\lim_{k \in \mathcal{K}} x^k = x^*.$$

Suponhamos que  $x^*$  não seja um minimizador global de (2.4). Isto implica que existe  $z$  tal que

$$P(x^*) > P(z).$$

Como  $P$  é contínua, existe  $v > 0$  tal que, para  $k \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K} \in \mathbb{N}$  suficientemente grande,

$$P(x^k) > P(z) + v.$$

Multiplicando por  $\mu_k > 0$  temos,

$$\mu_k P(x^k) > \mu_k P(z) + \mu_k v.$$

Daí,

$$f(x^k) - f(x^k) + \mu_k P(x^k) > f(z) - f(z) + \mu_k P(z) + \mu_k v$$

Portanto, para esses índices  $k$ ,

$$f(x^k) + \mu_k P(x^k) > f(z) + \mu_k P(z) + \mu_k v + f(x^k) - f(z).$$

Como  $Q(x; \mu) = f(x) + \mu P(x)$ , temos

$$Q(x^k; \mu_k) > Q(z; \mu_k) + \mu_k v + f(x^k) - f(z).$$

Como a sequência  $\{x^k\}_{k \in \mathcal{K}}$  é limitada,  $f$  é contínua e  $\mu_k \rightarrow \infty$ , temos que, para  $k \in \mathcal{K}$  suficientemente grande,

$$\mu_k v + f(x^k) - f(z) > 0.$$

Logo,

$$Q(x^k; \mu_k) > Q(z; \mu_k)$$

o que contradiz o fato de que  $x^k$  é uma solução global do subproblema definido por  $\mu_k$ . Esta contradição ocorreu por supor que  $x^*$  não era um minimizador global de (2.4).

Como  $x^*$  é minimizador global de (2.4), então existe pelo menos um ponto viável  $z$ , onde  $P$  vale zero. Portanto,  $P$  também deve se anular em  $x^*$ , o que implica que  $x^*$  é viável.  $\square$

**Teorema 8** (Teo 2.3 [4]). *Seja  $z$  um minimizador global de (2.4). Suponhamos que a sequência  $\{x^k\}$  admite um ponto limite  $x^*$ . Então,  $x^*$  também é um minimizador global de (2.4) e, além disso,  $f(x^*) \leq f(z)$ .*

*Demonstração.* O fato de que  $x^*$  é minimizador global de (2.4) foi provado no Teorema 7. Seja  $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{k \in \mathcal{K}} x^k = x^*$ . Pela definição de  $x^k$ , temos que:

$$f(x^k) + \mu_k P(x^k) \leq f(z) + \mu_k P(z),$$

para todo  $k \in \mathcal{K}$ . Mas, como  $z$  é um minimizador global de (2.4),

$$\mu_k P(x^k) \geq \mu_k P(z).$$

Portanto,

$$f(x^k) \leq f(z), \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

Tomando limites nesta desigualdade, pela continuidade de  $f$  e o fato de que  $x^k \rightarrow x^*$  para  $k \in \mathcal{K}$ , obtemos que  $f(x^*) \leq f(z)$ .  $\square$

No próximo teorema será visto que, quando a região é viável e não vazia, encontra-se um minimizador global do problema (2.3). Este resultado é consequência do Teorema 8.

**Teorema 9** (Teo 2.4 [4]). *Suponhamos que a região viável do problema (2.3) é não vazia e a sequência  $\{x^k\}$  admite um ponto limite  $x^*$ . Então,  $x^*$  é um minimizador global de (2.3).*

*Demonstração.* Pelo Teorema 8,  $x^*$  é viável e  $f(x^*) \leq f(z)$  para qualquer outro ponto viável  $z \in \Omega$ . Portanto,  $x^*$  é minimizador global de (2.3).  $\square$

Geralmente, os pontos  $x^k$  gerados pelo método de penalidade não são viáveis. Ou seja, alguma restrição do tipo  $c_i(x^k) \leq 0$  ou  $c_i(x^k) = 0$  quase sempre é violada. Quando todas as restrições são satisfeitas em um ponto  $x^k$ , então  $x^k$  é solução do problema (2.3). Esta propriedade é provada no teorema seguinte.

**Teorema 10** (Teo 2.5 [4]). *Suponhamos que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x^k$  é viável. Então,  $x^k$  é minimizador global de (2.3).*

*Demonstração.* Seja  $z$  um ponto viável. Pela definição de  $x^k$  temos:

$$f(x^k) + \mu_k P(x^k) \leq f(z) + \mu_k P(z).$$

Como  $x^k$  e  $z$  são viáveis,

$$P(x^k) = P(z) = 0.$$

Portanto:

$$f(x^k) \leq f(z).$$

Como  $z$  é um ponto viável arbitrário, deduzimos que  $x^k$  é um minimizador global de (2.3).  $\square$

## 2.3 Método de Penalidade Quadrática

Desde que a otimização global, para um problema de programação não linear genérico, tem poucos resultados devido à sua complexidade, optamos por trabalhar o caso local, ou seja, determinar um minimizador local que resolva o problema proposto. Portanto, nesse caso, a função de penalidade quadrática é mais simples para ser resolvida. Para o método de penalidade quadrática restringimos nossa atenção para o problema com restrição de igualdade

$$\min_x f(x) \text{ sujeito a } c(x) = 0, \quad (2.5)$$

com  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que é um caso especial de (1.1).

Alguns exemplos de funções de penalidade exata que podem ser escolhidas, são:

- $P(x) = \|c(x)\|_1 = \sum_i^m |c_i(x)|$
- $P(x) = \|c(x)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} |c_i(x)|$
- $P(x) = \frac{1}{2} \|c(x)\|_2^2 = \sum_i^m c_i(x)^2$

A função de penalidade mais simples deste tipo é a *função de penalidade quadrática*, pois é uma função diferenciável, na qual os termos de penalidade são a soma dos quadrados das violações de restrições. A qual abordaremos nesse trabalho, onde o subproblema a ser resolvido será

$$Q(x; \mu) = f(x) + \frac{\mu}{2} \|c(x)\|^2. \quad (2.6)$$

O Algoritmo 1 de penalidade quadrática é dado da seguinte forma:

---

**Algoritmo 1** Método da penalidade quadrática

---

- 1: Dado  $\mu_0 > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , uma sequência não negativa  $\{\epsilon_k\}$  com  $\epsilon_k \rightarrow 0$  e começando com um ponto  $x_0$ ;
  - 2: **para**  $k=0,1,2,\dots$  **faça**
  - 3:   Encontre  $x_k$  tal que  $\|\nabla Q(x^k; \mu^k)\| \leq \epsilon_k$ ;
  - 4:   **se**  $\|\nabla \mathcal{L}(x^k, \lambda^k)\| \leq \epsilon_k$  e  $\|c(x^k)\| < \epsilon$  **então**
  - 5:     retorna  $x_k$
  - 6:   **fim se**
  - 7:   Escolha um novo parâmetro de penalidade  $\mu_{k+1} > \mu_k$ ;
  - 8: **fim para**
- 

O parâmetro  $\mu_k$  pode ser escolhido com base na minimização de  $Q(x; \mu_k)$ . Se a minimização se tornar computacionalmente cara pode-se escolher  $\mu_{k+1}$  um pouco maior que  $\mu_k$  (por exemplo,  $\mu_{k+1} = 1,5 \mu_k$ ). Caso contrário, pode-se tentar um aumento maior (por exemplo,  $\mu_{k+1} = 10 \mu_k$ ). Não há garantias que o critério de parada  $\|\nabla Q(x; \mu_k)\| \leq \epsilon_k$  seja satisfeito, pois as iterações podem mover a solução para fora da região viável quando o parâmetro de penalidade não é suficiente.  $Q(x; \mu_k)$  é diferenciável e a solução pode ser aproximada. A minimização de  $Q(x; \mu_k)$  torna-se mais difícil à medida que  $\mu_k$  aumenta, visto que a matriz Hessiana  $\nabla^2 Q(x; \mu_k)$  torna-se arbitrariamente mal condicionada próximo do ponto de mínimo.

**Exemplo 1.** Considere o problema

$$\min \frac{4x_1^2 + x_2^2}{2} \quad \text{sujeito a} \quad x_1 + x_2 = 1 \quad (2.7)$$

Esse problema tem ponto mínimo em  $[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ . A função de penalidade quadrática é dada por

$$Q(x, \mu) = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\mu}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 \quad (2.8)$$

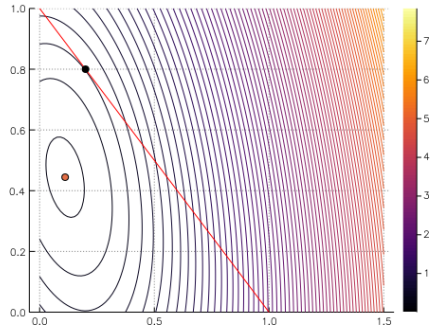


Figura 2 – Curvas de nível da função  $Q(x, \mu)$ , com  $\mu = 1$

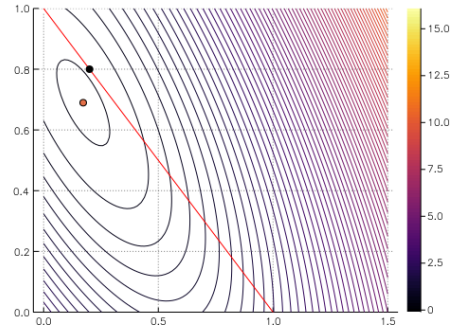


Figura 3 – Curvas de nível da função  $Q(x, \mu)$ , com  $\mu = 5$

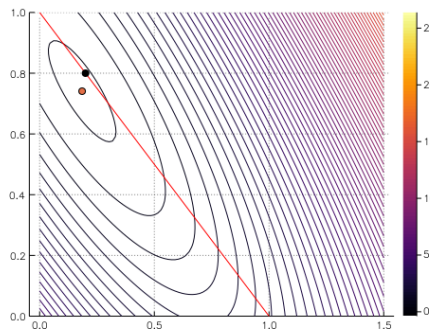


Figura 4 – Curvas de nível da função  $Q(x, \mu)$ , com  $\mu = 10$

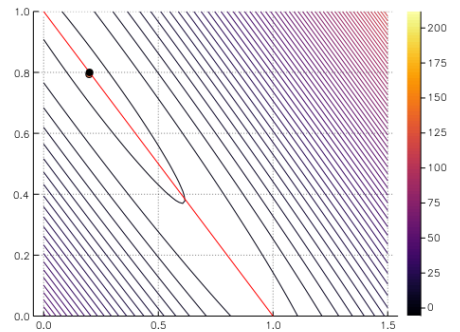


Figura 5 – Curvas de nível da função  $Q(x, \mu)$ , com  $\mu = 100$

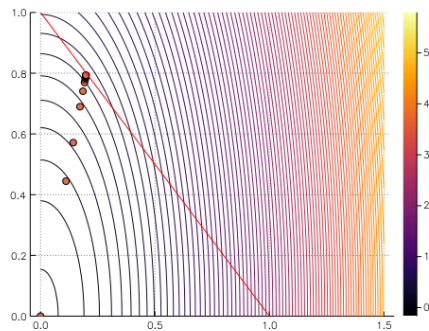


Figura 6 – Representação da variação de  $\mu$

As Figuras de 2 à 5 representam as curvas de nível da função penalizada, com valores de  $\mu = 1, 5, 10, 100$ . Observa-se que quanto maior a penalização, a solução do problema penalizado chega mais perto do minimizador da função original. A Figura 6 mostra a variação do parâmetro  $\mu$  com valores de 0 a 100.

### 2.3.1 Convergência do método de penalidade quadrática

É descrita algumas propriedades de convergência do método de penalidade quadrática no teorema seguinte.

**Teorema 11** (Teo 17.2 [2]). *Suponha que a tolerância e o parâmetro de penalidade no Algoritmo 1 satisfazem, respectivamente  $\epsilon_k \rightarrow 0$  e  $\mu_k \rightarrow \infty$ . Então, se um ponto limite  $x^*$  da sequência  $\{x^k\}$  é inviável, ele é um ponto estacionário da função  $\|c(x)\|^2$ . Por outro lado, se o ponto limite  $x^*$  é viável e o gradiente das restrições  $\nabla c_i(x^*)$  são linearmente independentes, então  $x^*$  é um ponto KKT para o problema (2.5). Para esses pontos e qualquer subsequência  $\mathcal{K}$  tal que  $\lim_{k \in \mathcal{K}} x^k = x^*$ , tem-se que*

$$\lim_{k \in \mathcal{K}} \mu_k c_i(x^k) = \lambda_i^*, \text{ para todo } i = 1, \dots, m \quad (2.9)$$

sendo  $\lambda^*$  um vetor de multiplicadores que satisfaz as condições de KKT (1.5) para o problema com restrições de igualdade (2.5).

*Demonstração.* Diferenciando  $Q(x; \mu_k)$ , em relação a variável  $x$ , em (2.6), obtemos

$$\nabla Q(x^k; \mu_k) = \nabla f(x^k) + \mu_k \sum_{i=1}^m c_i(x^k) \nabla c_i(x^k). \quad (2.10)$$

Disso, segue que

$$\left\| \nabla f(x^k) + \mu_k \sum_{i=1}^m c_i(x^k) \nabla c_i(x^k) \right\| \leq \epsilon_k. \quad (2.11)$$

Usando a desigualdade  $\|a\| - \|b\| \leq \|a + b\|$ , obtemos

$$\left\| \sum_{i=1}^m c_i(x^k) \nabla c_i(x^k) \right\| \leq \frac{1}{\mu_k} [\epsilon_k + \|\nabla f(x^k)\|]. \quad (2.12)$$

Seja  $x^*$  um ponto limite da sequência de iterações. Então, existe uma subsequência  $\mathcal{K}$  tal que o  $\lim_{k \in \mathcal{K}} x^k = x^*$ . Quando nós fazemos o limite de  $k \rightarrow \infty$  para  $k \in \mathcal{K}$ , o termo entre colchetes do lado direito aproxima-se de  $\|\nabla f(x^*)\|$ . Então, como  $\mu_k \rightarrow \infty$ , o lado direito aproxima de zero. A partir dos limites correspondentes no lado esquerdo, obtemos

$$\sum_{i=1}^m c_i(x^*) \nabla c_i(x^*) = 0. \quad (2.13)$$

Se o gradiente das restrições  $\nabla c_i(x^*)$ , são linearmente independentes no ponto limite  $x^*$ , nós temos de (2.13) que  $c_i(x^*) = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ , assim  $x^*$  é viável. Consequentemente a segunda condição de KKT (1.5b) é satisfeita. Nós precisamos verificar que a primeira condição de KKT (1.5a) é verdadeira, e mostrar que o limite (2.9) é satisfeito.

Usando  $J(x)$  para denotar a matriz dos gradientes das restrições, temos

$$J(x)^T = [\nabla c(x)]. \quad (2.14)$$

Definindo  $\lambda^k = \mu_k c(x_k)$ ,

$$J(x^k)^T \lambda^k = -[\nabla f(x^k) - \nabla Q(x^k; \mu_k)]. \quad (2.15)$$

Para todo  $k \in \mathcal{K}$  suficientemente grande, a matriz  $J(x^k)$  tem posto completo, assim  $[J(x^k)J(x^k)^T]$  é não singular. Multiplicando (2.15) por  $J(x^k)$ , temos que

$$\lambda^k = -[J(x^k)J(x^k)^T]^{-1} J(x^k)[\nabla f(x^k) - \nabla Q(x^k; \mu_k)]. \quad (2.16)$$

Quando o limite de  $k \in \mathcal{K}$  vai para  $\infty$ , encontramos

$$\lim_{k \in \mathcal{K}} \lambda^k = \lambda^* = -[J(x^*)J(x^*)^T]^{-1} J(x^*) \nabla f(x^*). \quad (2.17)$$

Pelos limites em (2.11), temos que

$$\nabla f(x^*) + J(x^*)^T \lambda^* = 0. \quad (2.18)$$

Assim,  $\lambda^*$  satisfaz a primeira condição de KKT (1.5a), (2.5) e também (2.9). Portanto,  $x^*$  é um ponto KKT para (2.5), com único vetor  $\lambda^*$  multiplicador de Lagrange.  $\square$

## 3 Método do Lagrangiano Aumentado

No capítulo anterior foram apresentados alguns métodos de penalização. Foi visto que o parâmetro de penalidade pode crescer sem limites, o que pode causar instabilidade ao método. O método do lagrangiano aumentado explicita os multiplicadores de Lagrange para minimizar a função, diminuindo o mal-condicionamento do subproblema. Como referências foram usadas [2], [4], [5].

### 3.1 Motivação

Considerando o problema com restrição de igualdade (2.5) e a função de penalidade quadrática definida por (2.6), definimos a função Lagrangiano aumentado

$$\mathcal{L}_A(x, \lambda; \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x) + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^m c_i^2(x). \quad (3.1)$$

A diferença do Lagrangiano aumentado para a função de Lagrange é a adição de termos do método da penalidade quadrática. No algoritmo é fixado o parâmetro de penalidade  $\mu$  para algum valor  $\mu_k > 0$  para a  $k$ -ésima iteração, e fixamos também  $\lambda$  para estimar  $\lambda^k$ , e resolvendo a minimização com respeito a  $x$ . Usando  $x^k$  para denotar o minimizador aproximado de  $\mathcal{L}_A(x, \lambda^k; \mu_k)$ , com as condições de otimalidade temos que:

$$0 \approx \nabla_x \mathcal{L}_A(x^k, \lambda^k; \mu_k) = \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m [\lambda_i^k + \mu_k c_i(x^k)] \nabla c_i(x^k). \quad (3.2)$$

Iremos usar  $\nabla \mathcal{L}_A(x^k, \lambda^k; \mu_k)$  para denotar  $\nabla_x \mathcal{L}_A(x^k, \lambda^k; \mu_k)$ , em  $x = x^k$ .

Comparando com a condição de otimalidade (2.18) para (1.1), podemos deduzir que

$$\lambda^* \approx \lambda_i^k + \mu_k c_i(x^k), \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (3.3)$$

Reescrevendo a expressão, temos

$$c_i(x^k) \approx \frac{1}{\mu_k} (\lambda_i^* - \lambda_i^k), \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Quando  $\lambda^k$  se aproxima de  $\lambda^*$ ,  $c_i(x^k)$  se aproxima de zero, portanto,  $x^k$  é viável. Podemos também calcular uma estimativa para o multiplicador associado a partir de (3.3):

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \mu_k c_i(x_k), \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.5)$$



### 3.1.1 Algoritmo

Para o método do lagrangiano aumentado temos o seguinte algoritmo:

---

#### Algoritmo 2 Lagrangiano aumentado

---

- 1: Dados  $\mu_0 > 0$ ,  $\epsilon > 0$  uma sequência não negativa  $\{\epsilon_k\}$  com  $\epsilon_k \rightarrow 0$ ,  $x_0$  e  $\lambda^0$
  - 2: **para**  $k=0,1,2,\dots$  **faça**
  - 3:   Encontre  $x$  tal que  $\|\nabla \mathcal{L}_A(\cdot, \lambda^k, \mu_k)\| < \epsilon_k$
  - 4:   **se**  $\|\nabla \mathcal{L}(x^k, \lambda^k)\| \leq \epsilon$  e  $\|c(x^k)\| \leq \epsilon$  **então**
  - 5:     Retorne  $x^k$
  - 6:   **fim se**
  - 7:   Atualizar os multiplicadores de Lagrange usando  $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \mu_k c_i(x_k)$ , para  $i = 1, \dots, m$
  - 8:   Escolha um novo parâmetro de penalidade  $\mu_{k+1} \geq \mu_k$
  - 9: **fim para**
- 

Em cada iteração do Algoritmo 2 é considerado um ponto inicial  $x^k$  para resolver o subproblema.

## 3.2 Propriedades do Lagrangiano Aumentado

A análise de convergência do Algoritmo 2, é feita com a condição de qualificação de independência linear dos gradientes das restrições.

**Teorema 12** (Teo 17.5 [2]). *Seja  $x^*$  uma solução local do problema (1.1) na qual o gradiente  $\nabla c_i(x^*)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são vetores linearmente independentes, e as condições suficientes de segunda ordem especificadas no Teorema 6 são satisfeitas para  $\lambda = \lambda^*$ . Então existe um valor limite  $\bar{\mu}$  tal que para todo  $\mu \geq \bar{\mu}$ ,  $x^*$  é um minimizador local estrito de  $\mathcal{L}_A(x, \lambda^*; \mu)$*

*Demonstração.* Mostremos que  $x^*$  satisfaz as condições suficientes de segunda ordem para ser um minimizador local de  $\mathcal{L}_A(x, \lambda^*; \mu)$  para todo  $\mu$  suficientemente grande, ou seja

$$\nabla \mathcal{L}_A(x^*, \lambda^*; \mu) = 0 \text{ e } \nabla^2 \mathcal{L}_A(x^*, \lambda^*; \mu) \text{ definida positiva.} \quad (3.6)$$

Como  $x^*$  é uma solução, então

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}_A(x^*, \lambda^*; \mu) &= \nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} [\lambda_i^* + \mu c_i(x^*)] \nabla c_i(x^*) \\ &= \nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) \\ &= \nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

verificando a primeira parte de (3.6), independente de  $\mu$ . Para a segunda parte de (3.6), definimos  $J$  como a matriz do gradiente das restrições em (2.14) avaliada em  $x^*$ , escrevemos então

$$\nabla^2 \mathcal{L}_A(x^*, \lambda^*; \mu) = \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) + \mu J^T J. \quad (3.8)$$

Supondo que  $\nabla^2 \mathcal{L}_A(x^*, \lambda^*; \mu)$  não seja definida positiva, então para algum inteiro  $k \geq 1$ , existe um vetor  $w_k$  com  $\|w_k\| = 1$  tal que

$$0 \geq w_k^T \nabla^2 \mathcal{L}_A(x^*, \lambda^*; k) w_k = w_k^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w_k + k \|J w_k\|_2^2, \quad (3.9)$$

e então

$$\|J w_k\|_2^2 \leq -\left(\frac{1}{k}\right) w_k^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w_k \rightarrow 0, \text{ e } k \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Desde que os vetores  $\{w_k\}$  estão em um conjunto compacto, eles possuem um ponto de acumulação  $w$ . O limite (3.10) implica que  $J w = 0$ . Além disso, rearranjando (3.9) temos que

$$w_k^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w_k \leq -k \|J w_k\|_2^2 \leq 0, \quad (3.11)$$

assim tomando o limite  $w^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w \leq 0$ . Porém, essa inequação contradiz as condições de segunda ordem do Teorema 6, onde aplicamos (1.1), condição tem que ser  $w^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w > 0$  para todo não nulo  $w$  com  $J w = 0$ . Por isso, a segunda parte de (3.6) é válida para todo  $\mu$  suficientemente grande.  $\square$

O próximo resultado, mostra condições em que existe um minimizador para  $\mathcal{L}_A(x^*, \lambda^*; \mu)$ .

**Teorema 13** (Teo 17.6 [2]). *Supondo que as condições do Teorema 12 são satisfeitas para  $x^*$  e  $\lambda^*$  e seja  $\bar{\mu}$  escolhido de acordo com esse mesmo teorema. Então existem escalares  $\delta$ ,  $\epsilon$ , e  $M$  tais que as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *Para todo  $\lambda^k$  e  $\mu_k$  satisfazendo*

$$\|\lambda^k - \lambda^*\| \leq \mu_k \delta, \quad \mu_k \geq \bar{\mu}, \quad (3.12)$$

*o problema*

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \mathcal{L}_A(x, \lambda^k; \mu_k) \\ & \text{sujeito a } \|x - x^*\| \leq \epsilon \end{aligned} \quad (3.13)$$

*tem uma solução única  $x^k$ . Além disso, temos*

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{M}{\mu_k} \|\lambda^k - \lambda^*\|. \quad (3.14)$$

(b) Para todo  $\lambda^k$  e  $\mu_k$  que satisfaz (3.12), temos

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda^*\| \leq \frac{M}{\mu_k} \|\lambda^k - \lambda^*\|, \quad (3.15)$$

onde  $\lambda^{k+1}$  é dado pela fórmula (3.5)

(c) Para todo  $\lambda^k$  e  $\mu_k$  que satisfaz (3.12), a matriz  $\nabla^2 \mathcal{L}(x^k, \lambda^k; \mu_k)$  é definida positiva e os gradientes das restrições  $\nabla c_i(x^k)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são linearmente independente.

Este teorema nos mostra algumas propriedades da função Lagrangiana Aumentada. O limite (3.14) mostra que  $x_k$  se aproxima de  $x^*$  se  $\lambda^k$  for  $\lambda^*$  ou se o parâmetro de penalidade for grande suficiente. O limite (3.15) mostra, que localmente, podemos garantir uma melhora nos multiplicadores, escolhendo para  $\mu_k$  um valor grande suficiente. A parte (c) do teorema mostra que a condição de segunda ordem, o Teorema 2, é satisfeita.

## 4 Testes Computacionais

Para realizar os testes utilizando os problemas da biblioteca CUTEst, foram implementados três algoritmos. O primeiro algoritmo é a implementação do método de penalidade quadrática.

O segundo algoritmo é a implementação do método do Lagrangiano Aumentado com o cálculo do  $\lambda$  exato, ou seja,  $\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \|\nabla f(x^*) + J(x^*)^T \lambda\|_2^2$ , que calculamos através da função *cglsls*, do pacote Krylov do Julia. Onde essa função resolve o sistema  $J\lambda = -\nabla f$ .

O terceiro algoritmo é a implementação do método do Lagrangiano Aumentado com o cálculo do  $\lambda$  através da atualização  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \mu_k c(x^k)$ , onde  $\mu_k$  é o parâmetro de penalidade e  $c(x^k)$  são as restrições do problema.

Para os três algoritmos, foram definidos o máximo de iterações como 1000, para o tempo máximo 30 segundos. A atualização do  $\lambda$  e do parâmetro de penalidade foi usado o Algoritmo 3, que foi baseado no Algoritmo 17.4 de [2]:

---

### Algoritmo 3 Cálculo de parâmetros

---

```

1: Dados  $\mu_0 = 10$ ,  $\epsilon_{sub} = \frac{1}{\mu_0}$ , e  $\eta_0 = \mu_0^{0.1}$ 
2: para  $k = 0, 1, 2, \dots$  faça
3:   se  $\|c(x^k)\| \leq \eta_k$  então
4:      $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \mu_k c(x^k)$ 
5:      $\mu_{k+1} = \mu_k$ 
6:      $\eta_{k+1} = \frac{\eta_k}{\mu_{k+1}^{0.9}}$ 
7:      $\epsilon_{sub_{k+1}} = \frac{\epsilon_{sub_k}}{\mu_{k+1}}$ 
8:   else
9:      $\lambda^{k+1} = \lambda^k$ 
10:     $\mu_{k+1} = 10\mu_k$ 
11:     $\eta_{k+1} = \frac{1}{\mu_{k+1}^{0.1}}$ 
12:     $\epsilon_{sub_{k+1}} = \frac{1}{\mu_{k+1}}$ 
13:   fim se
14: fim para

```

---

Para a saída dos testes realizados temos a forma como o algoritmo encerrou, ou porque atingiu o número máximo de iterações estipuladas ou porque atingiu o tempo limite para a resolução do problema, ou encontrou uma solução aproximada para o pro-

blema.

Saída	
0	uma aproximação da solução foi encontrada
1	atingiu o número máximo de iterações
2	atingiu o tempo máximo
3	algoritmo falhou

Tabela 1 – Saídas dos algoritmos

Os testes foram realizados para 74 problemas selecionados da biblioteca CUTEst, todos os problemas que continham até 100 variáveis e 100 restrições, devido a limitações do código.

Podemos observar no gráfico do perfil de desempenho, onde é comparado o tempo de resolução dos problemas e o número de avaliações de funções, e a quantidade de problemas que foram resolvidos para cada algoritmo.

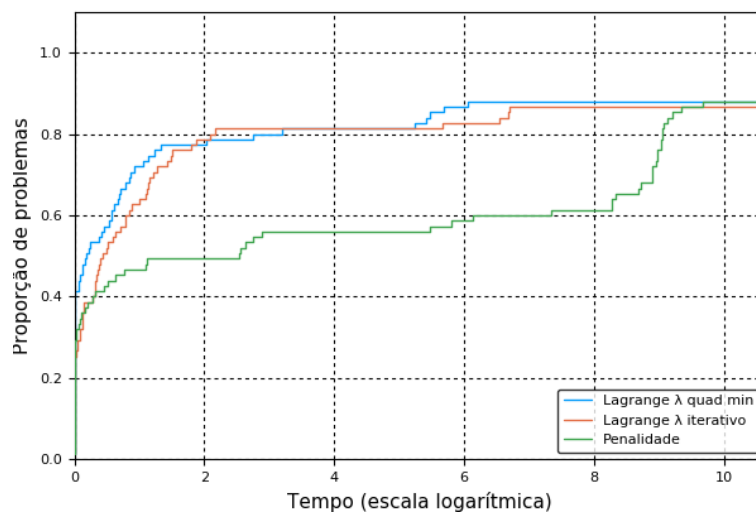


Figura 7 – Perfil de desempenho: tempo para 74 problemas

A Figura 7 mostra o tempo que os algoritmos levaram para resolver os 74 problemas. Observamos que o Algoritmo do Lagrangiano Aumentado com o cálculo do  $\lambda$  exato se mostrou mais rápido que os outros.

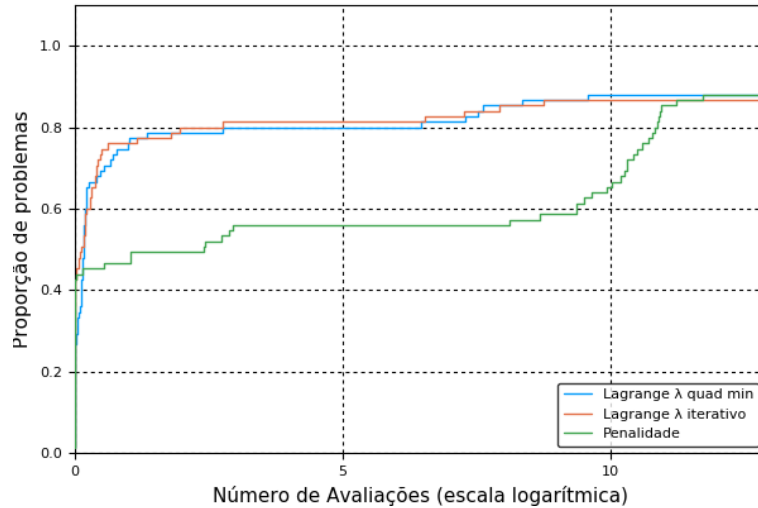


Figura 8 – Perfil de desempenho: avaliações de funções para 74 problemas

Consideramos para efeito de comparação o número de avaliações de funções que cada algoritmo realizou. Na Figura 8, observamos também que o Algoritmo do Lagrangiano Aumentado com o cálculo do  $\lambda$  exato, ou seja  $\lambda$  calculado com mínimos quadrados, se mostrou melhor, com um número menor de avaliações, que os outros dois métodos implementados.

# Conclusão

Neste trabalho foi estudado o método de penalidade quadrática e o método do lagrangiano aumentado para problemas com restrições de igualdade. Foram realizados testes numéricos que nos mostraram a eficiência e eficácia dos algoritmos. Foram comparados entre os algoritmos o número de avaliações de funções e o tempo que cada algoritmo levou para resolver cada problema. Os testes foram feitos em Julia, com 74 problemas restritos da biblioteca CUTEst, com até 100 variáveis e 100 restrições. O método do lagrangiano aumentado com  $\lambda$  exato se mostrou melhor, para os testes realizados.

# Bibliografia

- [1] A. A. Ribeiro e E. W. Karas, *Otimização Contínua - Aspectos Teóricos e Computacionais*, 1ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013, vol. 1.
- [2] J. Nocedal e S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2ª ed. New York: Springer, 2006.
- [3] D. G. Luenberger e Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, 4ª ed. New York: Springer, 2016.
- [4] J. M. Martínez, *Otimização Prática Usando o Lagrangiano Aumentado*. IMECC - UNICAMP, 2009.
- [5] E. R. Torrealba, *Uma Classe de Métodos de Lagrangiano Aumentado: Convergência e Testes Numéricos*. Curitiba: Dissertação, 2014.



# A Resultados

Nº	Problema	nv	nr	$f(x)$	$\ \mathcal{L}\ $	$\ c(x)\ $	$k$	S	AV	$t$
1	ARGAUSS	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
2	BOOTH	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	1.2561e-15	2	0	32	0.00059891
3	BT1	2	1	-1.0000e+00	7.0347e-09	9.9500e-09	18	0	820721	1.69878197
4	BT10	2	2	-1.0000e+00	1.1917e-14	1.4142e-09	19	0	521342	1.09108210
5	BT11	5	3	8.2489e-01	3.1613e-09	1.9985e-09	18	0	482359	1.30730510
6	BT12	5	3	6.1881e+00	6.7782e-12	4.9505e-09	23	0	1165094	2.66811013
7	BT2	3	1	3.2568e-02	8.6327e-09	1.0727e-09	23	0	681415	1.57648516
8	BT3	5	3	4.0930e+00	3.3215e-09	6.6796e-09	18	0	421126	0.94744492
9	BT4	3	2	-4.5511e+01	2.3048e-09	1.6374e-09	19	0	902897	2.00337291
10	BT5	3	2	9.6172e+02	4.3169e-09	1.2540e-09	18	0	803341	1.85032797
11	BT6	5	2	2.7704e-01	4.3577e-09	6.4164e-10	24	0	1004367	3.19508219
12	BT7	5	3	3.0650e+02	1.3551e-10	1.8857e-09	24	0	1125805	2.71148586
13	BT8	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
14	BT9	4	2	-1.0000e+00	1.9779e-09	1.4142e-09	19	0	521448	1.43266892
15	BYRDSPHR	3	2	-4.6833e+00	2.6385e-12	7.2703e-09	23	0	982231	2.22440696
16	CHNRBNE	50	98	0.0000e+00	0.0000e+00	9.2499e-11	8	0	7540	0.09034204
17	CLUSTER	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	1.3124e-11	9	0	403	0.00484800
18	COOLHANS	9	9	0.0000e+00	0.0000e+00	9.4859e-09	3	0	4235	0.02248096
19	CUBENE	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	8.7845e-12	5	0	918	0.00378084
20	DIXCHLNG	10	5	7.4843e-21	2.3112e-09	1.5503e-11	4	0	1517	0.01040792
21	FLT	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	3.9194e-09	20	0	180561	0.39951897
22	GENHS28	10	8	9.2717e-01	2.9192e-09	6.6954e-09	23	0	721670	2.32841802
23	GOTFR	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	1.5387e-11	7	0	464	0.00900888
24	GROWTH	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
25	HATFLDF	3	3	0.0000e+00	0.0000e+00	7.4561e-11	7	0	582	0.00422812
26	HATFLDG	25	25	0.0000e+00	0.0000e+00	9.1362e-12	7	0	821	0.00911307
27	HEART6	6	6	0.0000e+00	0.0000e+00	8.7771e-10	7	0	31269	0.13728809
28	HEART8	8	8	0.0000e+00	0.0000e+00	3.6712e-10	4	0	6440	0.02912593
29	HIMMELBA	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	8.8818e-16	2	0	32	0.00055718
30	HIMMELBC	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	3.1697e-13	5	0	190	0.00226092
31	HIMMELBD	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
32	HIMMELBE	3	3	0.0000e+00	0.0000e+00	5.2820e-13	7	0	157	0.00316381
33	HS100LNP	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
34	HS111LNP	10	3	-4.7761e+01	7.7351e-09	2.2263e-09	19	0	866633	11.81974292
35	HS26	3	1	1.4888e-12	6.3919e-09	4.5123e-11	7	0	840	0.00507092
36	HS27	3	1	4.0000e-02	1.9071e-17	4.0000e-09	21	0	240828	0.48208499
37	HS28	3	1	6.5328e-31	1.9610e-15	2.2204e-16	2	0	78	0.00070906
38	HS39	4	2	-1.0000e+00	1.9779e-09	1.4142e-09	19	0	521448	1.17589688

39	HS40	4	3	-2.5000e-01	5.5414e-15	7.7313e-09	23	0	882528	1.97421908
40	HS42	4	2	1.3858e+01	7.9655e-13	3.2294e-09	18	0	660870	1.44959593
41	HS46	5	2	5.5354e-12	4.0483e-09	8.5470e-10	6	0	933	0.00894308
42	HS47	5	3	1.6403e-13	5.1037e-09	8.0130e-10	8	0	898	0.00658393
43	HS48	5	2	3.4589e-25	1.5654e-12	6.0525e-12	2	0	65	0.00065207
44	HS49	5	2	2.0938e-12	2.7666e-09	4.4409e-16	9	0	671	0.00558305
45	HS50	5	3	1.5193e-64	7.7412e-48	6.2804e-16	7	0	380	0.00371504
46	HS51	5	3	7.0043e-26	8.9926e-13	7.1670e-13	2	0	71	0.00069308
47	HS52	5	3	5.3266e+00	8.0947e-15	8.9003e-09	18	0	621371	1.45353293
48	HS56	7	4	-3.4560e+00	2.3630e-09	1.4400e-09	18	0	662924	1.97474718
49	HS6	2	1	9.7676e-23	1.9766e-11	9.9420e-12	6	0	1079	0.00791001
50	HS61	3	2	-1.4365e+02	5.6145e-09	1.9514e-09	18	0	661831	1.35760498
51	HS7	2	1	-1.7321e+00	6.3356e-09	2.8868e-09	23	0	941073	1.90104413
52	HS77	5	2	2.4151e-01	1.7673e-09	9.1287e-09	21	0	621282	1.62898588
53	HS78	5	3	-2.9197e+00	4.5855e-09	1.0289e-09	18	0	603114	1.61316085
54	HS79	5	3	7.8777e-02	5.1516e-09	4.2272e-09	22	0	661647	1.74002695
55	HS8	2	2	-1.0000e+00	0.0000e+00	1.6998e-14	6	0	209	0.00276399
56	HS9	2	1	-5.0000e-01	8.4783e-11	3.2725e-09	21	0	300480	0.66949916
57	HYDCAR20	99	99	0.0000e+00	0.0000e+00	4.1465e-02	4	2	562280	49.70154881
58	HYDCAR6	29	29	0.0000e+00	0.0000e+00	3.5181e-09	14	0	295000	7.29498005
59	HYPICR	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	2.3102e-15	7	0	241	0.00327992
60	MARATOS	2	1	-1.0000e+00	3.4963e-10	5.0000e-09	23	0	800594	1.60966802
61	METHANB8	31	31	0.0000e+00	0.0000e+00	4.8220e-09	15	0	585356	12.94402385
62	METHANL8	31	31	0.0000e+00	0.0000e+00	3.2400e-09	13	0	611370	13.96684384
63	MSS1	90	73	-1.6000e+01	6.6422e-02	1.8441e-07	17	2	1485081	30.76863384
64	MWRIGHT	5	3	2.4979e+01	1.9516e-14	8.4971e-10	19	0	865112	2.19348311
65	ORTHREGB	27	6	9.2327e-19	1.9217e-09	8.4697e-11	4	0	2728	0.02359796
66	OSCIPANE	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
67	POWELLBS	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	5.0840e-09	13	0	124512	0.26337481
68	POWELLSQ	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	3.8488e-09	27	0	732996	1.55554390
69	RECIPE	3	3	0.0000e+00	0.0000e+00	3.2433e-09	20	0	180897	0.41635084
70	RSNBRNE	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	4.0582e-09	5	0	664	0.00393510
71	S316-322	2	1	3.3431e+02	1.0049e-14	1.8284e-09	20	0	600695	1.27194500
72	SINVALNE	2	2	0.0000e+00	0.0000e+00	5.9850e-09	3	0	544	0.00202107
73	YFITNE	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
74	ZANGWIL3	3	3	0.0000e+00	0.0000e+00	1.3878e-17	2	0	51	0.00065207

Tabela 2 – Penalidade quadrática

Nº	Problema	nv	nr	$f(x)$	$\ \mathcal{L}\ $	$\ c(x)\ $	$k$	S	AV	$t$
1	ARGAUSS	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
2	BOOTH	2	2	0.0000e+00	1.2561e-14	1.2561e-15	2	0	37	0.00056601
3	BT1	2	1	-1.0000e+00	7.7959e-08	3.8959e-09	7	0	416	0.00385118

4	BT10	2	2	-1.0000e+00	1.0573e-06	1.4953e-09	12	0	180659	0.34001589
5	BT11	5	3	8.2489e-01	7.1628e-07	6.1979e-10	11	0	71794	0.17630816
6	BT12	5	3	6.1881e+00	3.1102e-08	2.1958e-09	6	0	485	0.00338602
7	BT2	3	1	3.2568e-02	6.1753e-09	2.1042e-11	7	0	1066	0.01297784
8	BT3	5	3	4.0930e+00	1.2391e-06	2.0564e-10	8	0	70348	0.13507986
9	BT4	3	2	-4.5511e+01	2.1851e-06	4.9065e-09	8	0	618	0.00457811
10	BT5	3	2	9.6172e+02	1.7909e-07	9.8918e-10	5	0	419	0.00282693
11	BT6	5	2	2.7704e-01	1.6565e-07	3.6935e-09	6	0	1117	0.00581098
12	BT7	5	3	3.0650e+02	3.0605e-03	8.6163e-10	12	0	212122	0.44943118
13	BT8	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
14	BT9	4	2	-1.0000e+00	1.1155e-06	1.5776e-09	12	0	250777	0.53709102
15	BYRDSPHR	3	2	-4.6833e+00	8.9827e-09	4.7751e-10	8	0	710	0.00483799
16	CHNRSBNE	50	98	0.0000e+00	9.4328e-09	9.2597e-11	8	0	7679	0.09030390
17	CLUSTER	2	2	0.0000e+00	3.7977e-12	1.3124e-11	9	0	452	0.00472593
18	COOLHANS	9	9	0.0000e+00	8.9982e-09	9.3938e-09	4	0	4306	0.02451515
19	CUBENE	2	2	0.0000e+00	4.6150e-10	8.7845e-12	5	0	1008	0.00371814
20	DIXCHLNG	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
21	FLT	2	2	0.0000e+00	4.9075e-09	3.9194e-09	20	0	210651	0.38411117
22	GENHS28	10	8	9.2717e-01	1.5601e-08	6.1744e-10	8	0	531	0.00493813
23	GOTTFR	2	2	0.0000e+00	1.9955e-09	1.5387e-11	7	0	515	0.00463009
24	GROWTH	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
25	HATFLDF	3	3	0.0000e+00	2.2009e-09	7.4561e-11	7	0	637	0.00683284
26	HATFLDG	25	25	0.0000e+00	7.3396e-11	9.1362e-12	7	0	866	0.00849390
27	HEART6	6	6	0.0000e+00	5.2014e-09	4.2949e-09	7	0	31424	0.13606000
28	HEART8	8	8	0.0000e+00	5.4251e-08	3.0345e-10	5	0	7317	0.03374600
29	HIMMELBA	2	2	0.0000e+00	8.8818e-15	8.8818e-16	2	0	37	0.00057006
30	HIMMELBC	2	2	0.0000e+00	1.8887e-11	3.1697e-13	5	0	215	0.00233603
31	HIMMELBD	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
32	HIMMELBE	3	3	0.0000e+00	6.9838e-12	5.2820e-13	7	0	180	0.00314713
33	HS100LNP	7	2	6.8063e+02	1.4109e-06	6.1696e-09	5	0	965	0.00447202
34	HS111LNP	10	3	-4.7761e+01	9.2798e-08	5.7912e-09	12	0	1184	0.02204680
35	HS26	3	1	1.3903e-12	6.0997e-09	5.1958e-14	7	0	1011	0.00527596
36	HS27	3	1	4.0000e-02	5.3127e-08	5.3124e-09	6	0	680	0.00368619
37	HS28	3	1	2.0797e-29	4.1305e-13	1.0658e-14	3	0	124	0.00145698
38	HS39	4	2	-1.0000e+00	1.1155e-06	1.5776e-09	12	0	250777	0.48933792
39	HS40	4	3	-2.5000e-01	2.4914e-08	1.9421e-09	10	0	70489	0.15653300
40	HS42	4	2	1.3858e+01	1.3734e-07	1.3734e-09	11	0	393	0.00748897
41	HS46	5	2	1.7552e-11	1.1752e-07	2.4981e-09	6	0	1363	0.00598907
42	HS47	5	3	-2.6714e-02	4.3823e-06	1.7161e-09	8	0	72085	0.16313601
43	HS48	5	2	2.2199e-29	1.6407e-12	5.0324e-14	3	0	113	0.00120902
44	HS49	5	2	2.0938e-12	8.2984e-07	1.9071e-09	6	0	667	0.00389504
45	HS50	5	3	2.2820e-20	4.7826e-07	2.2726e-10	7	0	70727	0.13825703
46	HS51	5	3	6.6176e-17	2.8243e-07	4.6881e-09	10	0	477	0.00553107

47	HS52	5	3	5.3266e+00	1.0350e-06	1.5602e-09	8	0	355	0.00412416
48	HS56	7	4	-3.4560e+00	2.0494e-08	6.7380e-10	8	0	557	0.00496888
49	HS6	2	1	5.3979e-23	8.1559e-09	3.6533e-11	5	0	1190	0.00409985
50	HS61	3	2	-1.4365e+02	1.1000e-07	1.4694e-10	6	0	567	0.00667119
51	HS7	2	1	-1.7321e+00	1.2912e-07	3.7274e-09	6	0	747	0.00404596
52	HS77	5	2	2.4151e-01	2.3751e-08	5.9415e-10	7	0	776	0.00495481
53	HS78	5	3	-2.9197e+00	1.7802e-07	2.8235e-09	6	0	517	0.00400305
54	HS79	5	3	7.8777e-02	5.9433e-08	2.2759e-09	7	0	638	0.00694990
55	HS8	2	2	-1.0000e+00	7.9068e-13	1.6670e-14	6	0	237	0.00291896
56	HS9	2	1	-5.0000e-01	9.1370e-10	5.1070e-12	6	0	192	0.00275993
57	HYDCAR20	99	99	0.0000e+00	9.6163e-03	5.3881e-02	3	2	413382	36.86342382
58	HYDCAR6	29	29	0.0000e+00	8.1632e-09	3.2556e-09	15	0	322651	7.07729387
59	HYPICIR	2	2	0.0000e+00	4.7468e-14	2.3102e-15	7	0	273	0.00364304
60	MARATOS	2	1	-1.0000e+00	6.0570e-08	3.0285e-09	7	0	235	0.00331616
61	METHANB8	31	31	0.0000e+00	5.5070e-08	5.5386e-09	16	0	507052	10.60952711
62	METHANL8	31	31	0.0000e+00	1.1210e-08	3.0141e-09	13	0	726675	16.53206611
63	MSS1	90	73	-1.6000e+01	5.4899e-05	2.5277e-15	28	2	1684194	30.70934391
64	MWRIGHT	5	3	2.4979e+01	1.1859e-07	4.2705e-11	8	0	181148	0.41389894
65	ORTHREGB	27	6	1.4161e-18	2.1361e-06	6.2136e-09	3	0	2357	0.01865697
66	OSCIPANE	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
67	POWELLBS	2	2	0.0000e+00	5.0779e-09	5.0802e-09	13	0	144949	0.29017711
68	POWELLSQ	2	2	0.0000e+00	1.0629e-08	3.8488e-09	27	0	829661	1.59125614
69	RECIPE	3	3	0.0000e+00	3.7050e-09	3.2433e-09	20	0	211004	0.41613507
70	RSNBRNE	2	2	0.0000e+00	8.8711e-07	4.0582e-09	5	0	731	0.00420308
71	S316-322	2	1	3.3431e+02	1.1224e-06	5.6122e-11	10	0	220489	0.46551490
72	SINVALNE	2	2	0.0000e+00	6.4925e-07	5.9850e-09	3	0	600	0.00228500
73	YFITNE	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
74	ZANGWIL3	3	3	0.0000e+00	2.4037e-16	1.3878e-17	2	0	58	0.00062799

Tabela 3 – Lagrangiano aumentado com  $\lambda$  exato

Nº	Problema	nv	nr	$f(x)$	$\ \mathcal{L}\ $	$\ c(x)\ $	$k$	S	AV	$t$
1	ARGAUSS	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
2	BOOTH	2	2	0.0000e+00	2.5121e-14	1.2561e-15	2	0	37	0.00058603
3	BT1	2	1	-1.0000e+00	8.5378e-07	4.2688e-10	7	0	180463	0.34720898
4	BT10	2	2	-1.0000e+00	9.5777e-07	1.3562e-09	13	0	70658	0.13934898
5	BT11	5	3	8.2489e-01	7.7984e-07	6.7433e-10	12	0	251411	0.64143300
6	BT12	5	3	6.1881e+00	1.0749e-08	7.6290e-10	8	0	486	0.00473619
7	BT2	3	1	3.2568e-02	1.4972e-07	1.0041e-09	5	0	1031	0.00432587
8	BT3	5	3	4.0930e+00	1.1094e-06	1.8413e-09	9	0	357	0.00466394
9	BT4	3	2	-4.5511e+01	3.3320e-06	7.4870e-09	7	0	677	0.01174998
10	BT5	3	2	9.6172e+02	1.6199e-07	1.5482e-09	5	0	423	0.00407195
11	BT6	5	2	2.7704e-01	1.4991e-08	2.7955e-10	6	0	1034	0.00560689

12	BT7	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
13	BT8	5	2	1.0000e+00	7.1351e-09	3.1912e-10	7	0	420	0.00399709
14	BT9	4	2	-1.0000e+00	9.8656e-07	1.3970e-09	13	0	250759	0.55371618
15	BYRDSPHR	3	2	-4.6833e+00	6.2543e-09	3.6200e-10	9	0	708	0.00532508
16	CHNRSBNE	50	98	0.0000e+00	1.8092e-08	1.6957e-10	8	0	7949	0.10162401
17	CLUSTER	2	2	0.0000e+00	1.1984e-09	2.0353e-11	12	0	910	0.00972509
18	COOLHANS	9	9	0.0000e+00	3.9702e-08	8.6555e-13	9	0	5197	0.03680110
19	CUBENE	2	2	0.0000e+00	2.0066e-09	3.5121e-11	6	0	1061	0.01131201
20	DIXCHLNG	10	5	2.6274e-15	4.5318e-06	3.6452e-09	11	0	141950	0.81560016
21	FLT	2	2	0.0000e+00	5.7120e-15	2.2423e-28	8	0	273	0.00379896
22	GENHS28	10	8	9.2717e-01	1.0505e-07	4.1737e-09	7	0	381	0.00418806
23	GOTTFR	2	2	0.0000e+00	9.3489e-09	5.0552e-09	8	0	713	0.00552392
24	GROWTH	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
25	HATFLDF	3	3	0.0000e+00	4.3622e-10	2.6102e-11	15	0	141624	0.32208514
26	HATFLDG	25	25	0.0000e+00	5.4626e-09	6.7639e-10	8	0	1004	0.01043296
27	HEART6	6	6	0.0000e+00	7.1675e-09	2.6441e-13	16	0	211750	0.83105183
28	HEART8	8	8	0.0000e+00	3.2631e-07	2.2938e-09	8	0	7416	0.03323412
29	HIMMELBA	2	2	0.0000e+00	1.7764e-14	8.8818e-16	2	0	37	0.00056791
30	HIMMELBC	2	2	0.0000e+00	3.8150e-11	2.2137e-12	6	0	247	0.00575209
31	HIMMELBD	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
32	HIMMELBE	3	3	0.0000e+00	1.1919e-10	1.1163e-11	7	0	222	0.00330782
33	HS100LNP	7	2	6.8063e+02	4.8282e-07	7.4696e-10	5	0	924	0.00465417
34	HS111LNP	10	3	-4.7761e+01	2.1007e-08	4.2828e-11	10	0	182340	2.20061398
35	HS26	3	1	2.5389e-12	9.8094e-09	8.9329e-13	7	0	1106	0.00505495
36	HS27	3	1	4.0000e-02	4.4957e-09	1.1347e-10	8	0	587	0.00817084
37	HS28	3	1	6.5328e-31	1.8361e-14	2.2204e-16	2	0	83	0.00069880
38	HS39	4	2	-1.0000e+00	9.8656e-07	1.3970e-09	13	0	250759	0.51291203
39	HS40	4	3	-2.5000e-01	9.3067e-08	7.8038e-09	10	0	452	0.00526190
40	HS42	4	2	1.3858e+01	1.1850e-07	1.1849e-09	12	0	461	0.00632310
41	HS46	5	2	1.2250e-12	1.8145e-09	3.1607e-11	7	0	1167	0.00588989
42	HS47	5	3	2.3612e-13	1.7108e-07	4.6573e-09	8	0	810	0.00541496
43	HS48	5	2	8.4967e-25	6.1622e-10	9.4523e-12	2	0	66	0.00064707
44	HS49	5	2	2.0938e-12	6.9625e-09	4.4409e-16	9	0	681	0.00592899
45	HS50	5	3	1.6971e-17	5.6969e-08	2.7172e-09	8	0	503	0.00468588
46	HS51	5	3	1.2671e-29	5.3179e-13	1.0200e-14	2	0	70	0.00074887
47	HS52	5	3	5.3266e+00	6.7411e-07	1.0162e-09	9	0	357	0.00622702
48	HS56	7	4	-3.4560e+00	2.8443e-08	9.3202e-10	8	0	537	0.00511193
49	HS6	2	1	1.2326e-32	7.1995e-12	3.3307e-14	7	0	1220	0.00550604
50	HS61	3	2	-1.4365e+02	1.5011e-07	2.0762e-09	6	0	425	0.00347614
51	HS7	2	1	-1.7321e+00	9.3658e-08	2.7038e-09	6	0	746	0.00556493
52	HS77	5	2	2.4151e-01	1.0120e-07	2.5318e-09	8	0	781	0.00900292
53	HS78	5	3	-2.9197e+00	5.9784e-07	9.7064e-09	6	0	475	0.00378799
54	HS79	5	3	7.8777e-02	4.4978e-08	1.7039e-09	8	0	629	0.00563407

55	HS8	2	2	-1.0000e+00	1.2087e-11	3.5122e-13	7	0	290	0.00456905
56	HS9	2	1	-5.0000e-01	1.5169e-08	3.0339e-10	6	0	165	0.00302005
57	HYDCAR20	99	99	0.0000e+00	3.7572e-01	7.9269e-02	3	2	422281	37.22275805
58	HYDCAR6	29	29	0.0000e+00	5.4901e-07	2.8100e-10	20	2	1303475	30.07006788
59	HYPICIR	2	2	0.0000e+00	7.7152e-13	9.2397e-14	8	0	326	0.00391603
60	MARATOS	2	1	-1.0000e+00	6.2917e-08	3.1459e-09	7	0	235	0.00333595
61	METHANB8	31	31	0.0000e+00	1.3005e-06	5.5526e-09	12	2	1321607	30.75148702
62	METHANL8	31	31	0.0000e+00	2.6010e-07	3.4306e-09	12	2	1376769	30.85670304
63	MSS1	90	73	-1.5999e+01	1.4396e+01	3.1045e-05	12	2	2117591	44.33795810
64	MWRIGHT	5	3	2.4979e+01	1.2040e-07	4.3245e-10	8	0	110995	0.28196883
65	ORTHREGB	27	6	1.3861e-18	1.7895e-07	9.6227e-11	4	0	2422	0.01796103
66	OSCIPANE	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
67	POWELLBS	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
68	POWELLSQ	2	2	0.0000e+00	2.7529e-06	4.6942e-09	28	0	711347	1.39966679
69	RECIPE	3	3	0.0000e+00	5.2447e-10	1.5251e-10	10	0	646	0.00613999
70	RSNBRNE	2	2	0.0000e+00	6.3849e-09	1.4288e-09	8	0	823	0.00456691
71	S316-322	2	1	3.3431e+02	1.1196e-06	5.5978e-11	10	0	110484	0.23289990
72	SINVALNE	2	2	0.0000e+00	3.5017e-18	1.9993e-20	8	0	718	0.00477195
73	YFITNE	0	0	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0	3	0	0.00000000
74	ZANGWIL3	3	3	0.0000e+00	4.8074e-16	1.3878e-17	2	0	58	0.00060105

Tabela 4 – Lagrangiano aumentado